テスト付きクリーニ代数の準代数構造

Essentially algebraic structure for Kleene algebra with tests

木下 佳樹 †　　古澤 仁 ‡

Yoshiki KINOSHITA　　Hitoshi FURUSAWA

産業技術総合研究所 情報処理研究部門 情報科学連携研究体

C.R.T. of Informatics, AIST

yoshiki@ni.aist.go.jp†　　hitoshi.furusawa@aist.go.jp‡

Kozen と Smith は，有限集合 B，Σ の対が自由生成するテスト付クリーニ代数を構成する方法を与えた．我々は，有限性の仮定をはずし，任意の集合の対 B，Σ について，それらが自由生成するテスト付きクリーニ代数の存在を示した．さらに，Kozen と Smith が要素を明示することによって構成したテスト付きクリーニ代数が，クリーニ代数や冪等半環，ブール代数に加えて単位クォンテールなどの圏の間の随伴函手や単位クォンテールの直和構成を用いて得られることを明らかにする．

1　はじめに

Kozen[7] は，テスト付きクリーニ代数（Kleene algebra with tests）を導入し，**while** プログラムの代数的意味論に応用した．さらに，Kozen と Smith[5] は，普遍代数的なアプローチによってテスト付きクリーニ代数の自由代数の存在を示した．まず，有限集合 B，Σ からテスト付きクリーニ代数 $\mathcal{P}_{B,\Sigma}$ を構成する方法を与え，$\mathcal{P}_{B,\Sigma}$ を余域とする，ある準同型の像がちょうど自由代数となることを示したのである．

Kozen と Smith による自由代数の存在定理の証明に用いられた $\mathcal{P}_{B,\Sigma}$ は B が有限のときにだけしか定義されないので，得られた存在定理も B が有限の場合に限られている．彼らは Σ も有限であることまで仮定しているが，これは必要ない．一方，FL スケッチの概念を用いてテスト付きクリーニ代数の構造を表現すると，B が有限でない場合にまで拡張した自由代数の存在定理を，FL スケッチの一般論から直ちに証明することができる．本稿の第一の目的は，この主張を詳細に展開することである．

本稿の第二の目的は，Kozen と Smith が与えた $\mathcal{P}_{B,\Sigma}$ の構造についての考察である．このテスト付クリーニ代数は，単に自由代数の存在定理の証明に用いられただけでなく，$Lang(A)$ すなわちアルファベット A 上の言語全体がなすクリーニ代数がクリーニ代数の理論 [6] において果たすのと同じ役割りをテスト付きクリーニ代数に対して果たしているので，その構造を詳細に考察することに興味がある．しかし，$\mathcal{P}_{B,\Sigma}$ の構成は複雑かつ場当たり的なものであった．我々は，クリーニ代数や冪等半環，ブール代数に加えて単位クォンテールと呼ばれる代数構造を合わせて考えた結果，随伴函手，直和などの標準的な構成を組み合わせて，有限とは限らない任意の集合 B,Σ に対してテスト付クリーニ代数 $\mathcal{Q}_{B,\Sigma}$ を定義し，しかも B が有限である場合には $\mathcal{P}_{B,\Sigma} \cong \mathcal{Q}_{B,\Sigma}$ が成り立つという意味で拡張することができたので報告する．

2　FL スケッチ

本節では，Barr と Wells[1] に従って FL スケッチの基本的な定義と定理を示す．

定義 2.1 (反射的グラフ) **反射的グラフ**とは二つの集合 G_0 と G_1，三つの写像 $\mathrm{src}, \mathrm{tgt}\colon G_1 \to G_0$, $\mathrm{i}\colon G_0 \to G_1$ の五つ組 $(G_0, G_1, \mathrm{src}, \mathrm{tgt}, \mathrm{i})$ で $\mathrm{src} \circ \mathrm{i} = \mathrm{tgt} \circ \mathrm{i} = \mathrm{id}_{G_1}$ を満たすものをいう．G_0 の元をこの反射的グラフの**節**，G_1 の元を**射**，$\mathrm{i}(a)$ を a 上の**反射**と呼ぶ．$\mathrm{src}(a)$，$\mathrm{tgt}(a)$ を，それぞれ a の**域**，**余域**と呼び，$a\colon \mathrm{src}(a) \to \mathrm{tgt}(a)$ と記す．反射的グラフは二ソートの代数系とみなすことができる．反射的グラフの間の**準同型**を，二ソート代数系の準同型として定める．

定義 2.2 (図式，可換図式，錐) 反射的グラフの準同型 $D\colon H \to G$ を H 型の G の**図式**という．特に，H が，**始点**と**終点**と呼ばれる二つの特別な節を持ち，始点から終点への道がちょうど二つあり，H の射はどれも，これら二つの道の一部になっているとき，D を**可**

換図式と呼ぶ．また，H が，頂点とよばれる特別な節 a と H の射の族 $P = \{ p_x \colon a \to x \mid x \in H_0 \setminus \{ a \} \}$ を持つとき，三つ組 $(D\colon H \to G, a, P)$ を G における H 型の**錐**（cone）と呼ぶ．$D(n)$ を錐の**頂点**，$D(p_x)$ を**射影**と呼ぶ．錐 H の射が必ず反射であるか P の像に属するかいずれかである場合には**離散錐**という．

H が有限であるとき，図式 $D\colon H \to G$ は**有限図式**であるという．有限可換図式，有限錐などの言葉も用いる．

定義 2.3 (FL スケッチ) 反射的グラフ G，G における可換図式の集合 C，G における有限錘の集合 Γ の三つ組 (G, C, Γ) を**FL スケッチ**(FL sketch, finite limit sketch) という．G の射をスケッチ S の**演算子**と呼ぶ．

定義 2.4 (FL スケッチの集合モデルと準同型) FL スケッチ $S = (G, C, \Gamma)$ から集合と写像のなす圏 **Set**（を反射的グラフと見なしたもの）へのグラフ準同型 M が S の**集合モデル**であるとは，M が G のすべての節 a について a 上の反射 $i(a)$ を $M(a)$ 上の恒等写像に写し，C の任意の可換図式 D について，その始点から終点への二つの道を $f_0 f_1 \ldots f_m$ および $g_0 g_1 \ldots g_n$ とするとき $M(D(f_0)) \circ M(D(f_1)) \circ \ldots \circ M(D(f_m)) = M(D(g_0)) \circ M(D(g_1)) \circ \ldots \circ M(D(g_n))$ が成り立ち，しかも Γ に属する任意の錘 γ について $M \circ \gamma$ が **Set** における極限錘であることをいう．FL スケッチ S の集合モデルの間の**準同型**を“自然変換”によって定める：S 集合モデル M から M' への準同型 α とは節集合 G_0 によって添数づけられた写像の族 $(\alpha_x \in \mathbf{Set}(M(x), M'(x)) \mid x \in G_0)$ で，G_1 任意の射 $f\colon x \to y$ に対して $M'(f) \circ \alpha_x = \alpha_y \circ M(f)$ が成り立つようなものである．S の集合モデルの全体とそれらの間の準同型は圏をなす．これを $\mathbf{Mod}(S)$ と書いて S の**モデル圏**と呼ぶ．

定義 2.5 (FL スケッチ可能) 圏 C が**FL スケッチ可能**あるいは**準代数構造をもつ**とは，モデルの圏が C と同値であるようなスケッチが存在することである．

定理 2.6 (M. Barr[2]) 等式ホーン理論 (equational Horn theory) のモデルとその間の準同型がなす圏は，FL スケッチ可能である．

例えば，クリーニ代数，ブール代数，冪等半環は，どれも等式ホーン理論によって公理化されているので，クリーニ代数の圏 **Kleene**，ブール代数の圏 **Bool**，冪等半環の圏 **ISR** は，いずれもスケッチ可能である．

例 2.7 (2) グラフとして，0 および 1 と呼ぶ二つの節からなる離散的な，つまり各節の反射以外に射がないような反射グラフを持ち，可換図式の集合，錐の集合が共に空であるような FL スケッチを **2** と書く．$\mathbf{Mod}(\mathbf{2}) \cong \mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$ である．

定義 2.8 (FL スケッチの射) FL スケッチ $S = (G, C, \Gamma)$ から FL スケッチ $S' = (G', C', \Gamma')$ への**射**は G から G' へのグラフ準同型 H で，C を C' へ写し（つまり C の任意の可換図式 D について，$H \circ D$ が C' に属し），Γ を Γ' へ写す（つまり Γ の任意の錘 γ について，$H \circ \gamma$ が Γ' に属する）ものである．

FL スケッチの間の射について，以下のような性質が成り立つことが知られている（たとえば [1]）．

定理 2.9 $h\colon S \to T$ を FL スケッチ S から FL スケッチ T へのスケッチ射とするとき，T のモデルから S のモデルへの函手 $h^*\colon \mathbf{Mod}(T) \to \mathbf{Mod}(S)$ が導出され，しかもそれは左随伴 $h^\sharp\colon \mathbf{Mod}(S) \to \mathbf{Mod}(T)$ を持つ．

3 テスト付きクリーニ代数

Kozen はテスト付きクリーニ代数を，ブール代数を部分集合として含むクリーニ代数で，これら二つの代数の和と積がブール代数の上では一致しているようなものとして定義した．しかしブール代数の台集合がクリーニ代数の台集合の部分集合である，という要請は本質的でなく，Kozen の議論でも全く用いられていない．重要なのはブール代数とクリーニ代数の和および積が共に一致する，という性質である．そこでわれわれはテスト付きクリーニ代数を多ソート代数として次のように定める．

定義 3.1 テスト付きクリーニ代数はブール代数 $\mathbf{B} = (B, 0_B, 1_B, +_B, \cdot_B, \neg)$，クリーニ代数 $\mathbf{K} = (K, 0_K, 1_K, +_K, \cdot_K, {}^*)$，B から K への写像 $j\colon B \to K$ で 0，1，+，$\cdot$ を保つもの，の三つ組 $(\mathbf{B} \xrightarrow{j} \mathbf{K})$ である．K_0 の元を**コマンド**，B_0 の元を**テスト**と呼ぶ．

Kozen[7] の意味でのテスト付きクリーニ代数は j が包含写像になっている特別の場合である．

テスト付きクリーニ代数の全体とその間の準同型を **Kat** と書く．**Kat** をモデル圏とする FL スケッチ KAT が存在する．以下では KAT の概略を示す．まず，スケッチにおける n 項演算子を次のように定める．

定義 3.2 (n 項演算子) $f\colon a \to b$ を FL スケッチ $S = (G, C, \Gamma)$ の演算子とする．Γ に属する離散錐 ($\gamma\colon H \to G, p, P$) で頂点 p を a に写し（つまり $\gamma(p) = a$），p 以外の節をすべて b に写し（つまり $H_0 \ni x \neq p$ ならば $\gamma(x) = b$），しかも $H_0 \setminus \{ n \}$ の元の数が n のものがあるとき，f を S における b 上のn **項演算子**という．

KAT の反射的グラフは二つの節点 B，K を持つ．また，B 上の定数 0_B,1_B，単項演算子 $\neg$，二項演算子 $+_B$，$\cdot_B$ があり，これらについてのブール代数の構造を与える可換図式および錐がある．また，K 上の定数 0_K,1_K，単項演算子 *，二項演算子 $+_K$，$\cdot_K$ があり，これらについてのクリーニ代数の構造を与える可換図式および錐がある．さらに，j が 0，1，+，$\cdot$ を保つことを現わす可換図式がある．以上が KAT の概略である．

定義 3.3 (自由生成されたテスト付クリーニ代数) B，Σ を集合とするとき，(B, Σ) が**自由生成**するテスト付クリーニ代数とは，テスト付きクリーニ代数 $F(B, \Sigma) = (\mathbf{B} \xrightarrow{j} \mathbf{K})$ と，B から $\mathbf{B}$ の台集合 B への写像 $\eta_B\colon B \to B$，σ から $\mathbf{K}$ の台集合 K への写像 $\eta_K\colon B \to K$ で，次の普遍条件 (universality) を満たすものである：任意のテスト付きクリーニ代数 $\mathbf{TK}' = (\mathbf{B}' \xrightarrow{j'} \mathbf{K}')$，写像 $f\colon B \to B'$, $g\colon \Sigma \to K'$ に対して，$f = \widehat{f} \circ \eta_B, \qquad g = \widehat{g} \circ \eta_K$ を満たすテスト付きクリーニ代数の射 $(\widehat{f}, \widehat{g})\colon F(B, \Sigma) \to \mathbf{TK}'$ が唯一つ存在する．

定理 3.4 (テスト付クリーニ代数の自由生成) B，Σ を集合とするとき，(B, Σ) によって自由生成されるテスト付きクリーニ代数が存在する．

証明 例 2.7 に示した FL スケッチ **2** から KAT への FL スケッチ準同型で，0 を B に，1 を K に写すものを i と呼ぶ．$\mathbf{Mod}(\mathbf{2}) \cong \mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$，$\mathbf{Mod}(\mathrm{KAT}) = \mathbf{Kat}$ であった．i が導く函手 $i^*\colon \mathbf{Kat} \to \mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$ は，定理 2.9 により左随伴 $i^\#\colon \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \to \mathbf{Kat}$ を持つ．したがって，二つの集合 B，Σ を与えると，テスト付きクリーニ代数 $i^\#(B, \Sigma)$ および (B, Σ) から $i^*(i^\sharp(B, \Sigma))$ への $\mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$ における射 $\eta_{(B,\Sigma)} = (\eta_B, \eta_K)$（これは随伴の単位である）が定まる．これらのデータが普遍条件を持つことは，随伴函手の定義から明らかである．

Kozen と Smith は，B が有限の場合に限定して，定理 3.4 と同値な結果を得た．彼らは Σ も有限であることまで仮定しているが，このことは必要ではない．我々の FL スケッチを用いた議論により，B が有限であるという仮定が不要であることが明らかになったのである．

4 クォンテール

著者の一人が考察したように，クリーニ代数の理論においては，与えられたアルファベット上の言語の全体がクリーニ代数をなしていることが重要であった [3]．このクリーニ代数は，アルファベットによって自由生成される単位クォンテールである．本節では，どの単位クォンテールもクリーニ代数と見なすことができることを，単位クォンテールの圏 **UQuant** からクリーニ代数の圏 **Kleene** への忠実函手の存在によって示し，また，**UQuant** における直和の構成を与える．

4.1 単位クォンテールとクリーニ代数

定義 4.1 (単位クォンテール) **単位クォンテール** (unital quantale) とは三つ組 $(Q, e, \cdot, \bigvee)$ で $(Q, e, \cdot)$ が単 (monoid)，$(Q, \bigvee)$ が完備上半束 (complete upper semilattice) であり，$\bigvee$ が $\cdot$ に関して両側に分配する，つまり $\bigvee\{ a \cdot b_i \mid i \in I \} = a \cdot \bigvee\{ b_i \mid i \in I \}$，$\bigvee\{ b_i \cdot a \mid i \in I \} = \bigvee\{ b_i \mid i \in I \} \cdot a$ が任意の $a \in Q$ と Q の元の任意の族 $(b_i \mid i \in I)$ について成り立つものである．

積 $\cdot$ が単位元 e を持つとは限らないようなものは**クォンテール**と呼ばれる．

注意 4.2 クォンテールは，完備上半束であるから，常に最大元 $\top \overset{\mathrm{def}}{=} \bigvee Q$ と最小元 $\bot \overset{\mathrm{def}}{=} \bigvee \emptyset$ を持ち，また分配則により，$x \cdot \bot = \bot = \bot \cdot x$ が成り立つ．

例 4.3 (形式言語) 与えられた集合 X によって自由生成される単 (monoid) を $(M(X), \epsilon, \cdot)$ と書くと，$\mathrm{Lang}(X) \overset{\mathrm{def}}{=} (P(M(X)), \{\epsilon\}, \circ, \bigcup)$ は単位クォンテールである．ただし，$P(M(X))$ は $M(X)$ の冪集合，$\circ$ は要素毎の $\cdot$ として $L \circ L' \overset{\mathrm{def}}{=} \{\sigma \cdot \sigma' \mid \sigma \in L, \sigma' \in L' \}$ と定め，$\bigcup$ は合併集合によって定義される $P(M(X))$ 上の演算である．

Lang(X) の台集合は，X をアルファベットとする言語全体がなす集合である．Lang(X) はクリーニ代数でもあった．Lang(X) に限らず，すべての単位クォンテールはクリーニ代数と見なすことができる．

命題 4.4 単位クォンテール $(Q, e, \cdot, \bigvee)$ を $(Q, \bot, e, \bigvee, \cdot, [x \mapsto \bigvee\{ x^n \mid n \in \omega \}])$ に写すことによって，単位クォンテールの圏 **UQuant** からクリーニ代数の圏 **Kleene** への忠実函手 E: **UQuant** $\to$ **Kleene** が得られる．

また，単位クォンテールは冪等半環とも関係深い．次の命題を後に用いる．

命題 4.5 単位クォンテール $(Q, e, \cdot, \bigvee)$ を冪等半環 $(Q, \bot, e, \bigvee, \cdot)$ に写す忘却函手 U_{UI} は左随伴 F_{IU} を持つ．

4.2 単位クォンテールの直和

二つの群の直和（自由積）の構成はよく知られている（たとえば [8]）が，同様にして単位クォンテールの直和を構成することができる．

構成 4.6 $\mathbf{R_j} = (R_j, e_j, \cdot_j, \bigvee_j)$，$(j = 1, 2)$ を二つの単位クォンテールとするとき，R_1 の元と R_2 の元を交互に並べた有限列（空列 ϵ を含む）の全体がなす集合 X_0 を $X_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{ x_0 x_1 x_2 \ldots x_n \mid 0 \le n < \omega, (x_{2m} \in R_1 \wedge x_{2m+1} \in R_2) \vee (x_{2m} \in R_2 \wedge x_{2m+1} \in R_1) \}$ によって定義する．X_0 の冪集合 $P(X_0)$ の上の関係 $\equiv$ を，$\emptyset \equiv \{ \bot_j \}$ $(j = 1, 2)$ および $\bigvee_j Y_j \equiv \bigcup_j Y_j$ $(j = 1, 2,\ Y_j \subseteq R_j)$ によって生成される単位クォンテール合同関係として定め，X をその商集合として $X \stackrel{\text{def}}{=} P(X_0)/\equiv$ と定める．

以下では，$W \in X_0$ が属する $\equiv$-同値類を $[W]$ と記すことにする．

$P(X)$ 上の演算子 $\bigvee$ を $\bigvee([W]) \stackrel{\text{def}}{=} [\bigcup(W)]$ によって定める．また，X 上の二項演算子 $\cdot$ を定めるため，まず X_0 の二つの元 $x_0 x_1 \ldots x_m$，$y_0 y_1 \ldots y_n$ に対して，$x_0 x_1 \ldots x_m \cdot_0 y_0 y_1 \ldots y_n$ を次のように定義する: $x_m = e_j$ の場合，$(x_0 \ldots x_{m-1}) \cdot_0 (y_0 \ldots y_n)$; $y_0 = e_j$ の場合，$(x_0 \ldots x_m) \cdot_0 (y_1 \ldots y_n)$; $x_m, y_0 \in R_j$ で $x_m, y_0 \neq e_j$ の場合，$x_0 \ldots x_{m-1}(x_m \cdot_j y_0) y_1 \ldots y_n$; その他の場合，$x_0 \ldots x_m y_0 \ldots y_n$．そうして A，B に対し，$A_0 \in A$，$B_0 \in B$ をとって $A \cdot B \stackrel{\text{def}}{=} [\{ a \cdot_0 b \mid a \in A_0,\, b \in B_0 \}]$ と定める．$\bigvee$ や $\cdot$ は well-defined であり，$(X, \{ \epsilon \}, \cdot, \bigvee)$ は単位クォンテールである．これを $R_1 + R_2$ と書く．

さらに R_j（$j = 1, 2$）から $R_1 + R_2$ への準同型 ι_j を $R_j \ni x \longmapsto [\{ x \}]$ によって定める．

以上の構成に関して，次の命題が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[r, shift left, "F_U"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[d, equal] & \mathbf{UQuant} \arrow[l, shift left, "U_U"] \arrow[r, "E"] \arrow[d, shift left, "U_{UI}"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{Kleene} \\
\mathbf{Set} \arrow[r, shift left, "F_I"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[d, equal] & \mathbf{ISR} \arrow[l, shift left, "U_I"] \arrow[u, shift left, "F_{IU}"] \arrow[r, shift left, "F_{IB}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Bool} \arrow[l, shift left, "U_{BI}"] \arrow[d, equal] \\
\mathbf{Set} \arrow[rr, shift left, "F_B"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathbf{Bool} \arrow[ll, shift left, "U_B"]
\end{tikzcd}
$$

図 1: **Kleene** 周辺の随伴函手

命題 4.7 $R_1 \xrightarrow{\iota_1} R_1 + R_2 \xleftarrow{\iota_2} R_2$ は単位クォンテールの圏における直和図式である．

よく知られているように，**Bool** から **Set** への忘却函手 U_B，**ISR** から **Set** への忘却函手 U_{ISR} は，それぞれ左随伴を持つ．このことと命題 4.4，4.5 などを合わせて，随伴函手や忠実函手を図 1 のように呼ぶこととする．

5 Kozen-Smith の構成について

前節の最後に述べたように，Kozen と Smith[5] は有限集合 B と Σ の対が自由生成するテスト付きクリーニ代数を構成した．そのために彼らが構成したテスト付きクリーニ代数 $\mathcal{P}_{B,\Sigma}$ は，それ自身，プログラムの連（run）を表現するものとして興味深いが，彼らの与えた構成は，集合の元を明示的に与える場当たり的なものであった．以下では，テスト付きクリーニ代数 $\mathcal{Q}_{B,\Sigma}$ を，図 1 に示した随伴函手や直和などの標準的な構成法を組み合わせて与え，これが $\mathcal{P}_{B,\Sigma}$ と同型であること，つまり $\mathcal{P}_{B,\Sigma} \cong \mathcal{Q}_{B,\Sigma}$ を示す．

構成 5.1 ($\mathcal{Q}_{B,\Sigma}$) B と Σ を集合とするとき，単位クォンテール $UQ_{B,\Sigma} = F_{IU}(U_{BI}(F_B(B))) + F_U(\Sigma))$ および標準的単射 ι: $F_{IU}(U_{BI}(F_B(B))) \to UQ_{B,\Sigma}$ を考える．ι は単位クォンテールの射だから，0，1 および和と積を保つ．したがって，$UQ_{B,\Sigma}$ を E で写

した $K_{B,\Sigma} = E(UQ_{B,\Sigma})$ および $F_B(B)$，ι の三つ組 $K_{B,\Sigma}, F_B(B), \iota)$ はテスト付きクリーニ代数である．これを $\mathcal{Q}_{B,\Sigma}$ と呼ぶ．

Kozen と Smith による自由代数存在定理の証明には $\mathcal{P}_{B,\Sigma}$ が用いられたが，我々の定理 3.4 の証明には $\mathcal{P}_{B,\Sigma}$ も $\mathcal{Q}_{B,\Sigma}$ も必要ない．ここで $\mathcal{Q}_{B,\Sigma}$ の構成を行うのは次の注意に示すように，連がつくるテストつきクリーニ代数としての興味があるからである．

注意 5.2 $\mathcal{Q}_{B,\Sigma}$ のコマンドは，$B \uplus B$ の元と Σ の元を並べてできる有限列の集合の同値類になっている．テストをシステムの状態，コマンドをシステムの状態遷移と見なすと，これらの有限列はシステムの連となり，$Q_{B,\Sigma}$ のコマンドは，連の同値類である．

構成 5.3 ($\mathcal{P}_{B,\Sigma}$([5])) Kozen と Smith[5] が構成したテスト付きクリーニ代数 $\mathcal{P}_{B,\Sigma}$ は，単位クォンテールなどを使って，次のように定義することができる．

有限集合 B と，集合 Σ を考える．$\mathcal{A}(F_B(B)) = \{\, x \in F_B(B) \mid 0 \leq y \leq x \Longrightarrow y = 0 \vee y = x \,\}$ とする．つまり $\mathcal{A}(F_B(B))$ は $F_B(B)$ のアトムの全体である．このとき，$C_{B,\Sigma} = (\mathcal{P}(X), \emptyset, \mathcal{A}(F_B(B)), \diamond, \bigcup)$ は単位クォンテールである．ただし $X = \{\alpha_1 p_1 \cdots \alpha_n p_n \alpha_{n+1} \mid \alpha_i \in \mathcal{A}(F_B(B)) \wedge p_i \in \Sigma\}$ であり，$\mathcal{P}(X)$ はその冪集合，$\diamond$: $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ は $C \diamond D = \{x\alpha y \mid x\alpha \in C \wedge \alpha y \in D \wedge \alpha \in \mathcal{A}(F_B(B))\}$ によって定義する．

$F_B(B)$ から，$C_{B,\Sigma}$ を図 1 における E で写したクリーニ代数 $E(C_{B,\Sigma})$ への写像 j を $j(b) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\, x \in \mathcal{A}(F_B(B)) \mid x \leq b \,\}$ によって定めると，この写像は 0，1，和，積を保つ．したがって，$(E(C_{B,\Sigma}), F_B(B), j)$ はテスト付クリーニ代数である．これが [5] で構成された $\mathcal{P}_{B,\Sigma}$ である．

補題 5.4 $\mathcal{P}_{B,\Sigma}$ のコマンドが作る単位クォンテール $C_{B,\Sigma}$ は $F_{IU}U_{BI}F_B(B)$ と $F_U(\Sigma)$ との直和である．

証明 $F_B(B)$ から $\mathcal{P}(X)$ への準同型 i_1 を $b \mapsto \{\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}(F_B(B)) \wedge \alpha \leq b\}$ によって定義する．また，$F_U(\Sigma)$ から $\mathcal{P}(X)$ への準同型 $i_2(X)$ を，Σ から $\mathcal{P}(X)$ への写像 $p \mapsto \{\alpha p \beta \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A}(F_B(B))\}$ の一意的な拡張として定める．i_1，i_2 が直和の標準的単射である．実際，単位クォンテール $\mathbf{Q}$ と準同型 $g_1\colon, F_B(B) \to \mathbf{Q}$，$g_2\colon, F_B(B) \to \mathbf{Q}$ が与えられているとき，h を，$C = \mathcal{A}(F_B(B))$ の場合，$h(C) \stackrel{\mathrm{def}}{=} e_{\mathcal{Q}}$，その他の場合には，$h(C) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigvee\{\, i_1(\alpha_1) i_2(p_1) \cdots i_1(\alpha_{m+1}) \mid \alpha_1 p_1 \cdots \alpha_{m+1} \in C\}$ と定めると h が，$g_j = h \circ i_j \quad (j = 1, 2)$ を満たす唯一の単位クォンテール準同型となる．

以上で，$\mathcal{P}_{B,\Sigma}$ のコマンドがつくるクリーニ代数 $E(C_{B,\Sigma})$ と $\mathcal{Q}_{B,\Sigma}$ のコマンドがつくるクリーニ代数 $K_{B,\Sigma}$ は，共に $F_{IU}U_{BI}F_B(B)$ と $F_U(\Sigma)$ との直和であり，したがって，これら二つは同型であることを示した．また，これらのテストがつくるブール代数は，共に $F_B(B)$ であった．

$E(C_{B,\Sigma})$ から $K_{B,\Sigma}$ への同型射は，上記で g_j を $K_{B,\Sigma}$ に関する標準的単射とおいたときの h である．さらにこの h について $j \circ h = \iota$ であるから，$\mathcal{P}_{B,\Sigma}$ と $\mathcal{Q}_{B,\Sigma}$ が同型であることが示された．

参考文献

[1] M. Barr and C. Wells. *Toposes, Triples and Theories.* Springer, 1985.

[2] Michael Barr. Models of horn theory. In J. Gray and A. Scedrov, editors, *Proc. of a Summer Research Conference, Categories in Computer Science and Logic*, No. 92 in Contemporary Mathematics, pp. 1–7. AMS, 1989.

[3] Y. Kinoshita. 不動点をめぐる代数構造たち．投稿中，[4] はこの草稿．

[4] Y. Kinoshita. 不動点をめぐる代数構造たち．日本ソフトウェア科学会第 18 回大会 (2001 年度) 論文集．日本ソフトウェア科学会, 2001. CD-ROM として大会参加者に配布．

[5] D. Kozen and F. Smith. Kleene algebra with tests: Completeness and decidability. In D. van Delen and M. Bezem, editors, *Proc 10th Int. Workshop Computer Science Logic (CSL'96)*, No. 1258 in Springer Lecture Notes in Computer Science, pp. 244–259, 1996.

[6] Dexter Kozen. A completeness theorem for kleene algebras and the algebra of regular events. *Information and Computation*, Vol. 110, pp. 366–390, 1994.

[7] Dexter Kozen. Kleene algebra with tests. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, Vol. 19, No. 3, pp. 427–443, May 1997.

[8] M. Steinberger. *Algebra.* PWS Publishing Company, 1994.